

# Matura próbna 2014 z matematyki-poziom podstawowy

## Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
odp	A	C	C	C	A	A	B	B	C	B	D	A

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	C	A	B	A	D	C	B	D	D	C	A	C

## Rozwiązania zadań otwartych

(zadania rozwiązał Mariusz Walkowiak, nauczyciel matematyki w Zespole Szkół Ekonomiczno-Administracyjnych w Bydgoszczy)

**Zadanie 26.** Rozwiąż równanie:  $\frac{3x-6}{x^2-4} = 2$ .

Rozwiązanie:

Wyznaczamy dziedzinę:  $x^2 - 4 \neq 0$

$$(x - 2)(x + 2) \neq 0$$

$$x \neq 2 \text{ i } x \neq -2$$

$$D = R \setminus \{-2, 2\}$$

Rozwiązujemy równanie:  $\frac{3x-6}{x^2-4} = 2 \quad / \cdot (x^2 - 4)$

$$3x - 6 = 2(x^2 - 4)$$

$$3x - 6 = 2x^2 - 8$$

$$3x - 6 - 2x^2 + 8 = 0$$

$$-2x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac, \text{ czyli } \Delta = 3^2 - 4(-2) \cdot 2 = 9 + 16 = 25. \text{ Stąd } \sqrt{\Delta} = 5.$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-3-5}{2 \cdot (-2)} = \frac{-8}{-4} = 2, \quad x_2 = \frac{-3+5}{2 \cdot (-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

Uwzględniając dziedzinę:  $x = -\frac{1}{2}$ .

Odp.:  $x = -\frac{1}{2}$ .

**Zad.27.** Wykaż, że dwusieczne dwóch sąsiednich kątów równoległoboku są prostopadłe.

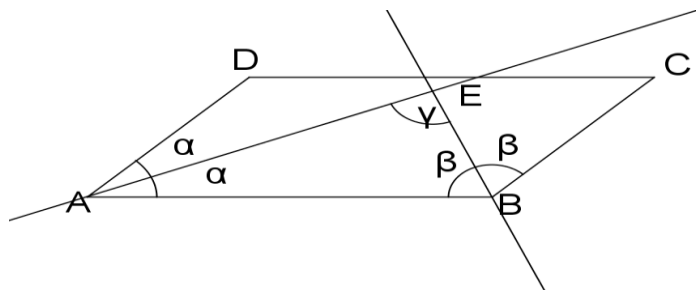
Rozwiązanie:

Założenie:  $pr.AE$  oraz  $pr.BE$ -dwusieczne kątów wewnętrznych równoległoboku

Teza:  $pr.AE \perp pr.BE$

Dowód:

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku:



Suma miar dwóch sąsiednich kątów równoległoboku jest równa  $180^\circ$ , zatem:

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ /:2$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Korzystając z faktu, że suma miar kątów trójkąta ABE jest równa  $180^\circ$  otrzymujemy:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Podstawiając:  $\alpha + \beta = 90^\circ$  otrzymujemy:  $90^\circ + \gamma = 180^\circ$

Stąd  $\gamma = 90^\circ$ , co oznacza, że dwusieczne sąsiednich kątów równoległoboku są prostopadłe.

end.

**Zad.28.** Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej  $y = x^2 - 4x + 1$  w przedziale  $\langle 3,5 \rangle$ .

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, czy współrzędna  $p$  wierzchołka paraboli należy do przedziału  $\langle 3,5 \rangle$ .

Obliczamy  $p = \frac{-b}{2a}$

$$p = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2 \notin \langle 3,5 \rangle$$

Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału  $\langle 3,5 \rangle$ :

$$f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = 9 - 12 + 1 = -2$$

$$f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 1 = 25 - 20 + 1 = 6$$

Odp.: Największa wartość funkcji  $y = x^2 - 4x + 1$  w przedziale  $\langle 3,5 \rangle$  jest równa 6, a najmniejsza  $-2$ .

**Zad.29.** Ze zbioru liczb trzycyfrowych mniejszych od 500 wybieramy losowo jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to liczba podzielna przez 3 lub przez 5?

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{ gdzie}$$

A – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby podzielnej przez 3,

B – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby podzielnej przez 5,

$A \cap B$  – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby podzielnej przez 3 i 5, czyli przez 15.

Liczb trzycyfrowych mniejszych od 500 jest  $499 - 99 = 400$ . Zatem  $\bar{\Omega} = 400$ .

Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$499:3 = 166,(\bar{6})$ . Zatem liczb mniejszych od 500 podzielnych przez 3 jest 166.

$99:3 = 33$ , czyli liczb mniejszych od 100 podzielnych przez 3 jest 33. Stąd liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3, mniejszych od 500 jest  $166 - 33 = 133$ . Więc  $\bar{A} = 133$ .

$$P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}} = \frac{133}{400}.$$

Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia B:

$499:5 = 99,8$ . Zatem liczb mniejszych od 500 podzielnych przez 5 jest 99.

$99:5 = 19,8$ , czyli liczb mniejszych od 100 podzielnych przez 5 jest 19. Stąd liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5, mniejszych od 500 jest  $99 - 19 = 80$ . Więc  $\bar{B} = 80$ .

$$P(B) = \frac{\bar{B}}{\bar{\Omega}} = \frac{80}{400}.$$

Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A \cap B$ :

$499:15 = 33,2(\bar{6})$ . Zatem liczb mniejszych od 500 podzielnych przez 15 jest 33.

$99:15 = 6,6$ , czyli liczb mniejszych od 100 podzielnych przez 15 jest 6. Stąd liczb trzycyfrowych podzielnych przez 15, mniejszych od 500 jest  $33 - 6 = 27$ . Więc  $\overline{A \cap B} = 27$ .

$$P(A \cap B) = \frac{\overline{A \cap B}}{\bar{\Omega}} = \frac{27}{400}.$$

Teraz podstawiamy do wzoru na prawdopodobieństwo sumy:

$$P(A \cup B) = \frac{133}{400} + \frac{80}{400} - \frac{27}{400} = \frac{186}{400} = \frac{93}{200}$$

Odp.: Prawdopodobieństwo wylosowania liczby trzycyfrowej mniejszej od 500 podzielnej przez 3 lub 5 jest równe  $\frac{93}{200}$ .

**Zad.30.** Wykaż, że jeżeli  $x + y = 5$ , to  $x^2 + y^2 \geq \frac{25}{2}$ .

Rozwiązanie:

Założenie:  $x + y = 5$

Teza:  $x^2 + y^2 \geq \frac{25}{2}$

Dowód:

$$x^2 + y^2 \geq \frac{25}{2} / \cdot 2$$

$$2x^2 + 2y^2 \geq 25$$

Korzystamy z założenia  $x + y = 5$  i wyznaczamy  $y = 5 - x$ .

Podstawiamy i otrzymujemy:

$$2x^2 + 2(5 - x)^2 \geq 25$$

$$2x^2 + 2(25 - 10x + x^2) \geq 25$$

$$2x^2 + 50 - 20x + 2x^2 - 25 \geq 0$$

$$4x^2 - 20x + 25 \geq 0$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia:

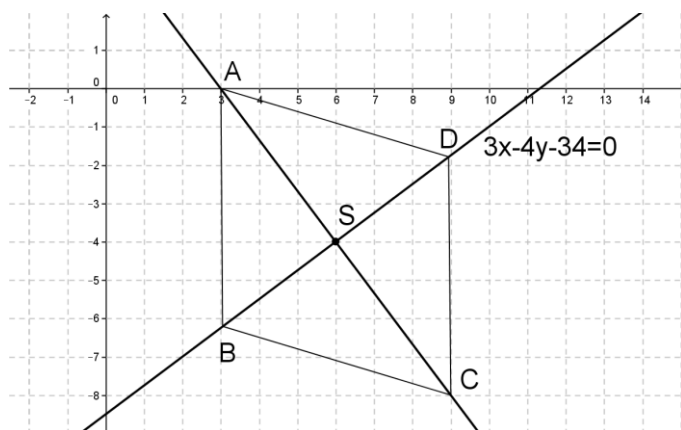
$$(2x - 5)^2 \geq 0$$

Powyższa nierówność jest prawdziwa dla  $x \in \mathbb{R}$ , zatem nierówność  $x^2 + y^2 \geq \frac{25}{2}$  jest prawdziwa, cnd.

**Zad.31.** Przekątne  $AC$  i  $BD$  rombu  $ABCD$  przecinają się w punkcie  $S = (6, -4)$ . Wyznacz równanie prostej zawierającej przekątną  $AC$  wiedząc, że prosta zawierająca przekątną  $BD$  ma równanie  $3x - 4y - 34 = 0$ .

Rozwiązanie:

Przykładowy rysunek do zadania:



Prostą  $3x - 4y - 34 = 0$  przekształcamy do postaci kierunkowej:

$$-4y = -3x + 34 \quad /: (-4)$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{34}{4}$$

Przekątne rombu są prostopadłe, więc prosta AC jest prostopadła do prostej BD.

Dwie proste są prostopadłe, jeśli iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy  $-1$ ,

zatem współczynnik kierunkowy prostej AC jest równy  $-\frac{4}{3}$ .

Prosta AC przechodzi przez punkt  $C = (6, -4)$ .

Wyznaczamy jej równanie:

$$y = ax + b$$

$$-4 = -\frac{4}{3} \cdot 6 + b$$

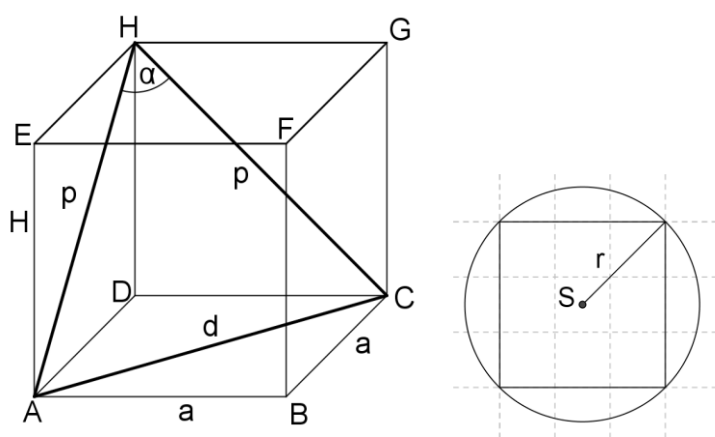
$$-4 = -8 + b$$

$$b = 4$$

Odp.: Równanie prostej zawierającej przekątną AC ma postać  $y = -\frac{4}{3}x + 4$ .

**Zad.32.** Objętość graniastoslupa prawidłowego czworokątnego jest równa  $224 \text{ cm}^3$ , promień okręgu opisanego na podstawie ma długość  $4 \text{ cm}$ . Wyznacz miarę kąta między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka graniastoslupa.

Rozwiązanie:



Oznaczenia:

a – krawędź podstawy,

H – wysokość graniastoslupa,

Dane:

$$V = 224 \text{ cm}^3$$

$$r = 4 \text{ cm}$$

$r$  – promień okręgu opisanego na podstawie,

$d$  – przekątna podstawy,

$p$  – przekątna ściany bocznej,

$\alpha$  – kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka graniastosłupa.

$$r = \frac{1}{2}d$$

$$4 = \frac{1}{2}d / \cdot 2$$

$$d = 8cm$$

Korzystamy ze wzoru na przekątną kwadratu  $d = a\sqrt{2}$  do obliczenia długości krawędzi podstawy:

$$8 = a\sqrt{2} / :\sqrt{2}$$

$$a = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}cm$$

Korzystamy ze wzoru na objętość graniastosłupa, aby obliczyć długość wysokości  $H$ :

$$V = Pp \cdot H$$

$$Pp = a^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32cm^2$$

$$224 = 32H / : 32$$

$$H = 7cm.$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AEH i obliczamy długość przekątnej ściany bocznej:

$$H^2 + a^2 = p^2$$

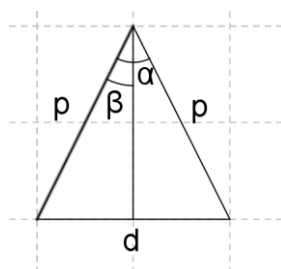
$$7^2 + (4\sqrt{2})^2 = p^2$$

$$49 + 32 = p^2$$

$$p^2 = 81$$

$$p = 9, p > 0.$$

Niech  $\beta = \frac{1}{2}\alpha$



Wyznaczamy miarę kąta  $\beta$  korzystając z funkcji trygonometrycznych:

$$\sin\beta = \frac{\frac{1}{2}d}{p} = \frac{4}{9} \approx 0,4444$$

Odczytujemy miarę kąta  $\beta$  korzystając z tablic matematycznych  $\beta = 26^\circ$ .

Zatem  $\alpha = 52^\circ$ .

Odp.: Miara kąta między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka graniastosłupa jest równa  $52^\circ$ .

**Zad.33.** Samochód przejechał  $\frac{1}{4}$  trasy ze średnią prędkością  $80 \text{ km/h}$ . Na całej trasie średnia prędkość samochodu była równa  $64 \text{ km/h}$ . Oblicz z jaką średnią prędkością samochód przejechał pozostałą część trasy.

Rozwiązanie:

Oznaczenia:

$s$  – długość trasy,  $s_1$  – długość  $\frac{1}{4}$  części trasy,  $s_2$  – długość  $\frac{3}{4}$  trasy,

$v$  – prędkość na całej trasie,  $v_1$  – prędkość na  $\frac{1}{4}$  części trasy,  $v_2$  – prędkość na  $\frac{3}{4}$  trasy,

$t$  – czas przejazdu całej trasy,  $t_1$  – czas przejazdu  $\frac{1}{4}$  trasy,  $t_2$  – czas przejazdu  $\frac{3}{4}$  trasy.

Dane:

$$v = 64 \text{ km/h}, v_1 = 80 \text{ km/h}$$

Korzystamy ze wzoru na prędkość  $v = \frac{s}{t}$ ,  $v_1 = \frac{\frac{1}{4}s}{t_1}$ ,  $v_2 = \frac{\frac{3}{4}s}{t_2}$ . Ponadto  $t = t_1 + t_2$ .

Ze wzoru na prędkość wyznaczamy  $t, t_1, t_2$ :

$$t = \frac{s}{v}, t_1 = \frac{\frac{1}{4}s}{v_1}, t_2 = \frac{\frac{3}{4}s}{v_2}.$$

Podstawiamy dane:

$$t = \frac{s}{64},$$

$$t_1 = \frac{\frac{1}{4}s}{80} = \frac{s}{4} \cdot \frac{1}{80} = \frac{s}{320}$$

$$t_2 = \frac{\frac{3}{4}s}{v_2} = \frac{3s}{4} \cdot \frac{1}{v_2} = \frac{3s}{4v_2}.$$

Wyznaczone  $t, t_1$  oraz  $t_2$  podstawiamy do zależności  $t = t_1 + t_2$  i rozwiązujemy równanie:

$$\frac{s}{64} = \frac{s}{320} + \frac{3s}{4v_2} \quad / \cdot 320v_2$$

$$5sv_2 = sv_2 + 240s \quad / : s$$

$$5v_2 = v_2 + 240$$

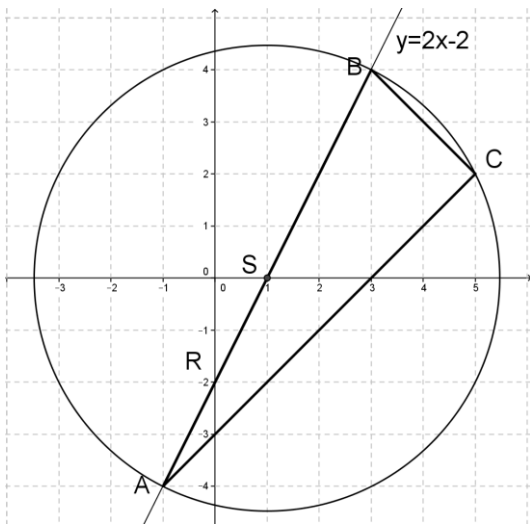
$$4v_2 = 240 \quad / : 4$$

$$v_2 = 60$$

Odp.: Średnia prędkość na pozostałej części trasy jest równa 60km/h.

**Zad.34.** W trójkącie prostokątnym  $ABC$  o przeciwprostokątnej  $AB$  dane są wierzchołki  $A = (-1, -4)$  i  $C = (5, 2)$ . Punkt  $B$  leży na prostej o równaniu  $y = 2x - 2$ . Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie:



Sprawdzamy, czy punkt  $A = (-1, -4)$  leży na prostej  $y = 2x - 2$

$$-4 = 2 \cdot (-1) - 2$$

$$-4 = -4$$

$$L = P$$

Zatem punkt  $A$  leży na prostej  $y = 2x - 2$ .

Wyznaczamy równanie prostej  $AC$ :

$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} -4 = -1a + b \quad / \cdot (-1) \\ 2 = 5a + b \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 4 = 1a - b \\ 2 = 5a + b \end{cases}$$


---



$$6 = 6a /: 6$$

$$a = 1$$

$$2 = 5a + b$$

$$2 = 5 \cdot 1 + b$$

$$b = -3$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

Prosta AC ma równanie:  $y = x - 3$ .

Wyznaczamy równanie prostej BC prostopadłej do AC i przechodzącej przez punkt B.

Dwie proste są prostopadłe, jeśli iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy  $-1$ , więc współczynnik kierunkowy prostej BC jest równy  $-1$ .

$$y = -1x + b$$

Podstawiamy współrzędne punktu C = (5, 2)

$$2 = -1 \cdot 5 + b.$$

Zatem  $b = 7$ . Równanie prostej BC ma postać:  $y = -x + 7$

Obliczamy współrzędne punktu B – punktu przecięcia prostych AB i BC rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = -x + 7 / \cdot 2 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} y = 2x - 2 \\ 2y = -2x + 14 \end{cases}$$

---

$$3y = 12 /: 3$$

$$y = 4$$

$$y = 2x - 2$$

$$4 = 2x - 2$$

$$4 + 2 = 2x$$

$$x = 3$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Punkt B = (3, 4).

Trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym, zatem środek okręgu opisanego na tym trójkącie jest środkiem przeciwprostokątnej AB.

Wyznaczamy współrzędne S środka odcinka AB:

$$S = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

$$S = \left( \frac{-1+3}{2}, \frac{-4+4}{2} \right) = (1, 0).$$

Wyznaczamy długość promienia R okręgu opisanego na tym trójkącie

$$R = |AS| = \sqrt{(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2}$$

$$R = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (0 - (-4))^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

Równanie okręgu o środku  $S = (a, b)$  i promieniu  $r$  ma postać:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Odp.: Równanie szukanego okręgu ma postać:  $(x - 1)^2 + y^2 = 20$